

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЗАСЕЛЕНИЯ ТЕРРИТОРИЙ С ПОМОЩЬЮ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

## MODELLING OF TERRITORY SETTLEMENT BY MEANS OF CELLULAR AUTOMATA

**Махалова Татьяна Павловна,**

студентка механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета  
E-mail: makhalova@list.ru

**Tatyana P. Makhalova**

**Русаков Сергей Владимирович,**

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Пермского государственного национального исследовательского университета  
E-mail: rusakov@psu.ru

**Sergey V. Rusakov**

Предложено обобщение математической модели S. C. Manrubia и D. H. Zanette: введена возможность учитывать совокупность факторов, способствующих формированию миграционных потоков и приживаемости мигрантов, механизмы регулирования перенаселенности и динамического управления интенсивностью миграционных потоков. Рассмотрены особенности развития модели и описан опыт ее применения для выявления наиболее перспективных участков при организации археологических исследований на исторически значимой для Пермского края территории — в Чердынском районе.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, миграции, археологические исследования, клеточные автоматы.

The paper offers a mathematical model for the study of the migration process in the preparation of archaeological research expeditions. The proposed modification of the model gives the opportunity to bring the evolution of this model to the general laws of migrations. There has been introduced a possibility to take into account the totality of the factors contributing to migration flows, the mechanisms of regulation of overcrowding and dynamic control of migrations.

*Keywords:* mathematical modeling, migration, archaeological research, cellular automata.

**И**зучение объектов историко-культурного наследия является одной из наиболее актуальных задач в исторических исследованиях. Как правило, подготовка археологических работ основана на исследовании архивных документов и прочих исторических материалов. Однако при

исследовании того или иного региона в определенный исторический период не всегда удается получить такие материалы.

В данной статье предложено применить математическое моделирование миграционных процессов в качестве дополнительного источника ин-

формации об исследуемой территории. Построение модели основано на различных факторах формирования подвижности населения (географических, экономических, географических условиях). В данной работе представлено обобщение модели<sup>1</sup>, введенной S. C. Manrubia и D. H. Zanette, а также особенности ее развития.

Помимо исследований свойств модели, в статье описан опыт ее применения для изучения миграционных процессов на территории Чердынско-го района Пермского края в XIV–XV вв.

Анализ полученных результатов моделирования позволяет выделить наиболее благоприятные для проживания территории.

## 1. ПОДХОДЫ К ИЗУЧЕНИЮ МИГРАЦИЙ

Изучением миграций и факторов их формирования в настоящее время занимается множество ученых. Ежегодно разрабатываются новые и совершенствуются существующие модели, описывающие миграционные процессы. Существует несколько традиционных подходов к моделированию миграции, которые позволяют получать результаты, применимые на практике. К ним относятся гравитационные, регрессионные, марковские и оптимизационные модели.

Многие из работ по исследованию миграций ссылаются на законы Э. Г. Равенштейна<sup>2</sup>, сформулированные на основе эмпирических наблюдений — переписи населения в Великобритании<sup>3</sup>. Другие модели описывают миграции на основе гравитационной модели, схожей с законом притяжения Ньютона. Так, Д. К. Зипф в 1946 г.<sup>4</sup> ввел модель, в которой интенсивность миграционных потоков возрастает с увеличением значимости региона и уменьшается с увеличением расстояния перемещения. С. Стоффер<sup>5</sup> предложил изучать миграцию в фокусе вмешивающихся обстоятельств — факторов, препятствующих миграционным процессам. Похожие идеи встречаются в статье Э. С. Ли «Теория миграции»<sup>6</sup>.

Большинство современных работ основывается на экономических показателях, в частности, опирается на уровень безработицы, ВВП и некоторые другие. Так, эконометрическая модель Гринвуда исследует миграции, учитывая миграционные связи между штатами<sup>7</sup>, а модель двухсекторной экономики<sup>8</sup> описывает сельско-городские миграции. В ряде работ значимую роль играют климатические условия<sup>9</sup>. Существуют модели внутренних миграций, основанные на анализе уровня безработицы<sup>10</sup>, где учитываются такие показатели, как средняя почасовая заработная плата, численность рабочей силы, занятой несельскохозяйственной

работой, кратчайшее расстояние между центрами регионов.

Все современные модели созданы с учетом особенностей современной общественно-политической формации. Более того, построение таких моделей основано на статистических показателях<sup>11</sup>. Указанные особенности современных моделей не позволяют применить их для описания миграционных процессов в отдаленном прошлом. Подобные выводы находят свое подтверждение в концепции миграционного (мобильного) перехода Вильбура Зелински<sup>12</sup>, где автор описывает эволюцию миграционных процессов в контексте эволюции общества, определяя характер миграций для различных фаз развития общества: первобытное традиционное общество, раннее мобильное общество, позднее мобильное общество, развитое общество, сверхразвитое общество.

## 2. МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МИГРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

С учетом указанных особенностей исследуемых процессов были сформулированы требования к математической модели решаемой задачи. Разрабатываемая модель должна учитывать совокупность факторов разной природы, поскольку миграции формируются под влиянием целого комплекса различных условий. Кроме того, она должна быть пространственной, т. е. моделировать передвижения населения и, наконец, характеризовать изменение наблюдаемых объектов или величин со временем.

Для исследования исторических миграционных процессов использовалась модель клеточного автомата, введенная S. C. Manrubia и D. H. Zanette<sup>13</sup>. Эта модель дискретна по времени, а рассматриваемое пространство разбито регулярной сеткой, т. е. представляет собой двумерный массив размерности  $M \times N$ . Каждая ячейка решетки  $(i, j)$ , где  $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$ , в момент времени  $t$  представляет собой некоторую величину, характеризующую население  $m_{i,j}^t$ . В качестве начального состояния будем рассматривать равномерное распределение по всем ячейкам области, в нашем случае полагалось  $m_{i,j}^0 = 1$  для всех ячеек  $(i, j)$ . При этом для заполнения границ массива была предусмотрена особая стратегия инициализации клеток. Появление дополнительных требований к значениям ячеек в граничных областях связано с необходимостью учитывать перемещение за границы рассматриваемой области. Одним из вариантов, позволяющих задавать направление внешних миграционных потоков, является добавление фиктивной области к исследуемому пространству: заполнение такой

области большими значениями позволяет указать направление, откуда происходит заселение территории, в то время как приписывание клеткам нулевых значений отражает процесс перемещения населения за пределы исследуемого региона. Развитие модели состоит из двух этапов: распространения и реакции.

Процесс распространения описывается уравнением:

$$m_{ij}^{t+1/2} = (1 - \alpha)m_{ij}^t + \frac{\alpha}{4}(m_{i-1,j}^t + m_{i+1,j}^t + m_{i,j-1}^t + m_{i,j+1}^t), \quad (1)$$

где  $0 < \alpha < 1$ .

Этот процесс обеспечивает «сглаживание» содержимого ячеек, в результате чего каждая клетка распределяет равномерно часть своего содержимого  $\alpha \times m_{ij}^t$  между соседями. Аналогом этого процесса в жизни является расселение из густонаселенной территории на соседние, менее заселенные пространства. Параметр  $\alpha$  характеризует мобильность населения: чем выше значение, тем больше интенсивность миграционных потоков на соседние территории.

Второй этап моделирования описывает процесс реакции:

$$m_{ij}^{t+1} = p^{-1}m_{ij}^{t+1/2} \text{ с вероятностью } p$$

$$0 < p < 1 \text{ с вероятностью } 1 - p, \quad (2)$$

где  $0 < p < 1$ .

Данный процесс является обобщением модели перемежаемости, введенной Я. Б. Зельдовичем. Ученый доказывал появление структурности в случайных средах, указывая, что случайность является основным механизмом возникновения структуры<sup>14</sup>. Такими структурами являются пики, возникающие в случайные моменты времени в случайных местах. При этом промежутки между ними характеризуются малой интенсивностью и большой протяженностью. Общее название такой картины и есть «перемежаемость».

В нашей задаче резкое отклонение от среднего значения клеток свидетельствует о накоплении благоприятных условий для «зарождения» и развития населенного пункта. Параметр  $p$  в рассматриваемой модели характеризует, насколько изначально благоприятны условия на данной территории. Для городов, имеющих длительную историю, значение такого параметра близко к единице.

Представленная модель содержит классические стадии миграционного процесса. На первой стадии формируется территориальная подвижность населения. Параметр  $\alpha$  характеризует степень мобильности жителей. Приживаемости мигрантов на новом

месте соответствует процесс реакции. Вероятность «выживания»  $p$  отражает возможность закрепления переселенцев на исследуемом участке.

### 3. МОДИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

**Н**есмотря на то, что в целом данная модель отражает характерные черты формирования миграционных потоков, она имеет ряд недостатков. Прежде всего в модели не учитывается тот факт, что разные участки имеют различные условия для проживания: природные, экономические особенности территории могут способствовать или препятствовать закреплению населения на определенном месте. Для отражения этой особенности каждой клетке автомата будем приписывать «свою» вероятность «выживания» по правилам (см. Параметры модели).

Другим недостатком исходной модели является отсутствие механизмов регулирования экстремально высокой численности населения в клетке. В результате процесса реакции (2) происходит экспоненциальный рост населения. Для регулирования таких значений введем понятие «потенциала». Под потенциалом клетки будет понимать некоторую максимальную численность населения в клетке, которая допускает оптимальное распределение доступных на территории ресурсов. Превышение этого показателя свидетельствует о перенаселении участка и введет к нехватке имеющихся ресурсов (площади проживания, земли для земледелия и т. п.). Для определения этого значения рассмотрим подробнее процесс роста населения.

Длительность жизни (исчисляемая количеством итераций) в одной клетке распределена по геометрическому закону. Другими словами, при вероятности «выживания»  $p$  средняя продолжительность жизни составит  $\xi$ , где  $\xi \sim Geom(1 - p)$  — число итераций до «первого вымирания». В этом случае средняя численность населения находится в интервале (3):

$$m_{i,j}^0 \left( \frac{1}{p_{i,j}} \right)^{M[\xi] - \sqrt{D[\xi]}} = m_{i,j} = m_{i,j}^0 \left( \frac{1}{p_{i,j}} \right)^{M[\xi] + \sqrt{D[\xi]}} \quad (3)$$

$$m_{i,j}^0 \left( \frac{1}{p_{i,j}} \right)^{\frac{p_{i,j} - \sqrt{p_{i,j}}}{1 - p_{i,j}}} = m_{i,j} = m_{i,j}^0 \left( \frac{1}{p_{i,j}} \right)^{\frac{p_{i,j} + \sqrt{p_{i,j}}}{1 - p_{i,j}}}, \quad (3')$$

где  $M[\xi] = \frac{P_{\text{выживания}}}{P_{\text{вымирания}}} = \frac{p_{i,j}}{1 - p_{i,j}}$ ,

$$D[\xi] = \frac{P_{\text{выживания}}^2}{P_{\text{вымирания}}^2} = \frac{p_{i,j}^2}{(1 - p_{i,j})^2}.$$

Тогда за потенциальное значение в клетке приемлем величину (4):

$$\Pi_{i,j} = m_{i,j}^0 \left( \frac{1}{p_{i,j}} \right)^{M[\xi] + \sqrt{D[\xi]}} = m_{i,j}^0 \left( \frac{1}{p_{i,j}} \right)^{\frac{p_{i,j} + \sqrt{p_{i,j}}}{1 - p_{i,j}}} \quad (4)$$

Далее будем называть эту величину потенциалом клетки.

Для начальной численности населения  $m_0 = 1$  получаем следующий график зависимости потенциала численности населения в клетке от вероятности выживания в ней (рис. 1).

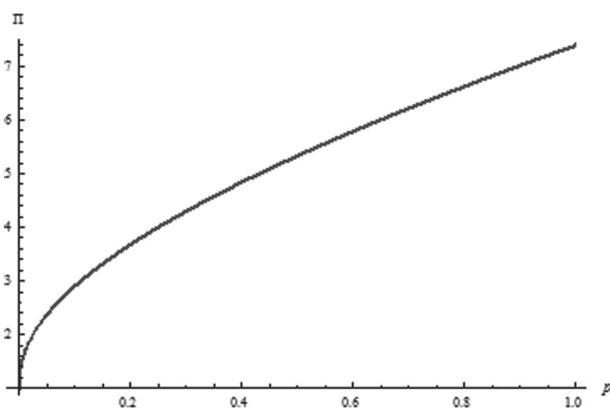


Рис. 1. Зависимость потенциала от вероятности выживания

Динамики изменения численности при разных значениях вероятности выживания имеют существенные различия. На рисунке 2 изображен график роста численности населения в клетке при разных значениях вероятности выживания. Рост населения при этом тем больше, чем меньше вероятность наступления этого события.

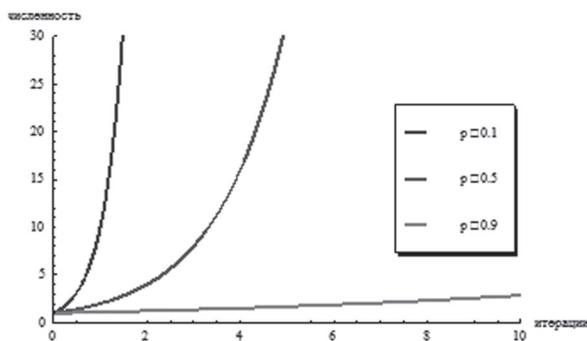


Рис. 2. Прирост численности населения в результате процесса реакции

Существенный прирост численности населения при  $p \approx 0$  является достаточно редким событием, в то время как незначительный прирост населения в  $p \approx 1$  раз при  $p \approx 1$  происходит практически на каждой итерации. Очевидно, что в ис-

ходной модели отсутствует механизм регулирования «пиковых» значений численности населения, что не соответствует реальному процессу размещения населения. Действительно, на определенном участке может разместиться только ограниченное число людей.

В данной работе предложено в случае перенаселения клетки усиливать миграционные потоки из клетки в соседние участки. В исходной модели (1), (2) в результате распространения в момент времени  $t + 1$  в клетке оставалась доля населения  $(1 - \alpha)m_{i,j}^t$ . В случае перенаселения положим, что в клетке в следующий момент времени останется только часть населения, равная потенциалу в этой клетке (4), в то время как оставшаяся часть распределится в соседние клетки.

Стоит отметить, что население распределяется по соседним клеткам неравномерно. Интенсивность потоков тем больше, чем больше свободных ресурсов имеется на участке, куда направлена миграция. Таким образом, параметр  $\alpha$ , характеризующий мобильность населения, будем вычисляться следующим образом:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha, & \text{если } m_{i,j}^t \leq \Pi_{i,j} \\ \frac{m_{i,j}^t - \Pi_{i,j}}{m_{i,j}^t}, & \text{если } \frac{m_{i,j}^t}{\Pi_{i,j}} > 1. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, если численность в клетке не достигла своего пикового значения, то миграции населения происходят с заданной для всех клеток интенсивностью  $\alpha$ . В случае перенаселения клетки в ней сохраняется максимально возможное количество жителей  $\Pi_{i,j}$ , а в соседние распределяется по  $\frac{1}{4} \times (m_{i,j}^t - \Pi_{i,j})$ . Процесс распространения в таком случае примет следующий вид:

$$m_{ij}^{t+1/2} = (1 - \alpha_{i,j})m_{ij}^t + \frac{1}{4}(\alpha_{i-1,j}m_{i-1,j}^t + \alpha_{i+1,j}m_{i+1,j}^t + \alpha_{i,j-1}m_{i,j-1}^t + \alpha_{i,j+1}m_{i,j+1}^t). \quad (6)$$

Раскрыв скобки, получаем процесс распространения в виде:

$$m_{ij}^{t+1/2} = m_{ij}^t + \frac{1}{4}(\alpha_{i-1,j}m_{i-1,j}^t - \alpha_{i,j}m_{ij}^t) + \frac{1}{4}(\alpha_{i+1,j}m_{i+1,j}^t - \alpha_{i,j}m_{ij}^t) + \frac{1}{4}(\alpha_{i,j-1}m_{i,j-1}^t - \alpha_{i,j}m_{ij}^t) + \frac{1}{4}(\alpha_{i,j+1}m_{i,j+1}^t - \alpha_{i,j}m_{ij}^t). \quad (7)$$

Как видно из формулы (7), клетку покидает часть населения, пропорциональная доли избыточной численности.

Благодаря ведению такого параметра, как потенциал клетки, и динамически изменяемого для каждой клетки значения  $\alpha$ , в модели появился аппарат для регулирования перенаселенности клетки и интенсивности миграционных потоков в соответствии с состоянием соседних клеток. Подобные нововведения в большей мере соответствуют реальному поведению мигрантов. Влияние описанной модификации на результаты моделирования приведены разделе 4.

### Параметры модели

Используемая модель построена на основе клеточного автомата. Она включает в себя регулярную решетку, каждой ячейке которой соответствует определенная территория в пространстве (на карте). При этом параметр  $p_{ij}$ , где  $i = 1, n$ ,  $j = 1, k$ , для каждой клетки позволяет указать, насколько благоприятны условия проживания в ней. Введем десятибалльную шкалу для определения значения этого параметра. Для этого каждой клетке припишем оценку  $v_{ij} = 0, 10$  ( $i = 1, n$ ,  $j = 1, k$ ). Местам, не пригодным для проживания, ставится в соответствие 0, для наиболее благоприятных мест параметр примет максимальное значение 10. Таким образом, каждый участок может быть оценен по совокупности факторов, оказывающих влияние на миграционные процессы.

Для каждого исследуемого региона в общем случае должен определяться собственный набор критериев оценки территории. Это обусловлено прежде всего разнообразием территорий, различными особенностями освоения земель, доступными ресурсами, стадией развития общества в исследуемый период и многими другими показателями.

В данной работе исследовались миграционные процессы на территории Чердынского района Пермского края в XIV–XV вв., когда происходило заселение этого региона славянскими племенами. В контексте поставленной задачи были выделены следующие группы факторов:

1. Природно-ландшафтные. В эту группу входят факторы, наличие которых необходимо для проживания на данной территории: незатопляемые речные террасы, отсутствие признаков овраговой и береговой эрозии, достаточно плоский рельеф, близость к источникам пресной воды и др.

2. Экономические. Эти факторы способствуют развитию хозяйственной деятельности населения, прежде всего сельского хозяйства, скотоводства. К таким факторам относятся тип почвы, наличие водоемов, неминеральных ресурсов (как следствие, возможность заниматься добычей пушнины, бортничеством, рыболовством, охотой), климатические

условия. К этой группе также можно отнести близость к пашням, сенокосам, пастбищам и прочим сельскохозяйственным угодьям, местам промыслов, месторождениям полезных ископаемых, стратегически важным транспортным развязкам, наличию транспортных артерий (судоходной реки, большого тракта).

3. Военно-административные. Наличие этих факторов способствует развитию населенных пунктов как административных единиц, обеспечивает надежность проживания в них. К таким факторам относятся особенности рельефа, удобные для создания укреплений (высокие речные мысы, ограниченные с трех сторон крутыми склонами, естественные узости на подступах к населенному пункту, отсутствие рядом более высоких точек, удобных для вражеского обстрела) и др.

Опишем параметры рассмотренной модели и их содержательный смысл:

$\alpha = 0, 1$  — коэффициент, характеризующий мобильность населения. Он определяется в результате экспериментов. Чем выше значение параметра, тем большая доля населения перемещается на соседние территории. Как показывают вычислительные эксперименты, при  $\alpha = 0, 05$  «выживаемость» (под «выживаемостью» в данной работе понимается вероятность того, что численность населения в момент времени  $t$  будет не меньше, чем в начальный момент) практически не зависит от формы области, а при  $\alpha = 0, 1$  клетки автомата демонстрируют наилучшие показатели «выживаемости»;

$T$  — временной промежуток. Определяет длительность моделируемого процесса. Известно, что каждая итерация соответствует приблизительно одному календарному году<sup>15</sup>;

$P_{\min}, P_{\max}$  — границы изменения параметра  $P$ , используемого в процессе распространения.

Эти параметры позволяют охарактеризовать территорию в целом. Минимальному значению вероятности соответствуют территории с самыми неблагоприятными условиями, а максимальному — наиболее благоприятные для проживания участки. Значения вероятности  $p_{ij}$  задают лишь относительные оценки для исследуемого пространства:

$$p_{ij} = P_{\min} + \frac{v_{ij}}{10} (P_{\max} - P_{\min}), i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}, \quad (8)$$

$N$  — количество моделирований. Многократное моделирование позволяет получить данные для нахождения статистических оценок результатов вычислительных экспериментов: средней численности населения в условных единицах и «выживаемости» — вероятности того, что в рассматриваемой области численность населения не уменьшится по сравнению с начальным значением.

#### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данном разделе рассмотрено влияние на результаты моделирования таких параметров модели, как граничные значения вероятности выживания, продолжительность моделирования, а также степень измельчения клеток.

Каждое отдельное исследование включало в себя 10000 моделирований при различных значениях одного из параметров и фиксированных значениях прочих<sup>16</sup>.

По окончании серии экспериментов были проанализированы средние значения вероятности «выживания» и численности населения.

##### 4.1. Условия моделирования

Поскольку определение единицы миграционного потока играет существенную роль при объяснении процесса формирования подвижности населения, введем понятия «установленной» и «моделируемой» площади объектов.

Под «установленной» площадью объекта будем понимать количество клеток, которое занимает этот объект в регулярной сетке, установленной экспертом. Каждому элементу такой сетки соответствует прямоугольный участок в исследуемой области. Задавая размеры такого участка, эксперт определяет уровень миграции — площадь единицы миграционного потока. Кроме установленной экспертом площади, введем понятие «моделируемой» площади — количества клеток, которое соответствует единице миграционного потока в клеточном автомате. Другими словами, степень измельчения  $m$  показывает, во сколько раз стороны изначально заданной клетки больше сторон клеток, используемых при моделировании:  $a_m = m \times a_y$ ,  $S_m = S_y \times m^2$ , где  $S_m$  — площадь клетки, участвующей в моделировании;  $S_y$  — площадь клетки, установленной экспертом;  $a_m$  — сторона клетки, участвующей в моделировании;  $a_y$  — сторона клетки, установленной экспертом.

Для исследования особенностей развития модели была выбрана самая простая из всех возможных конфигураций — объект, занимающий одну «установленную» клетку. Поскольку в процессе развития модели происходит взаимодействие соседних клеток в окрестности Неймана, данная клетка была помещена в центральную часть регулярной сетки автомата размерностью  $50 \times 50$  клеток, чтобы исключить возможность искажения результатов моделирования ввиду ограниченности рассматриваемой области.

Итак, далее будем рассматривать следующие параметры:  $T$  — длительность моделирования (ко-

личество итераций);  $P_{\max}$  — вероятность «выживания» для клеток, имеющих максимальную оценку;  $P_{\min}$  — вероятность выживания для клеток с минимальной оценкой;  $S$  — площадь ячейки клеточного автомата («моделируемая» площадь).

Для серии проведенных экспериментов были выбраны следующие значения параметров:

$$P_{\max} = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\},$$

$$P_{\min} = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\},$$

$$T = \{20, 50, 100\}, m = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Далее будут представлены лишь некоторые результаты, демонстрирующие общие закономерности функционирования исследуемой модели.

##### 4.2. Особенности развития модифицированной модели

Модифицированная модель с механизмом регулирования экстремально высоких показателей численности населения демонстрирует лучшую выживаемость с ростом  $P_{\max}$ ,  $P_{\min}$  и  $m$ . Стоит отметить, что для модифицированной модели значительно возрастает доля экспериментов, в результате которых численность населения увеличивается по сравнению с начальным значением ( $m_0 = 1$ ).

С увеличением степени измельчения клетки характерные черты развития усовершенствованной модели проявляются сильнее. На рисунках 3 и 4 представлены результаты работы модифицированного алгоритма при степени измельчения клеток сетки в 2 и 4 раза.

Полученные зависимости от совокупности параметров ( $P_{\max}$ ,  $P_{\min}$ ,  $m$ ) достаточно сложно выражаются в аналитической форме. Общие черты развития модели можно описать следующими утверждениями:

- 1) влияние отдельно взятого параметра модели возрастает с ростом прочих параметров;
- 2) значения численности населения и вероятности «выживания» убывают по показательному закону с увеличением длительности моделирования;
- 3) влияние рассмотренных параметров на результат моделирования неравнозначен: наибольшее влияние оказывает степень измельчения клетки, в меньшей степени — верхняя граница вероятности выживания; нижняя граница незначительно влияет на результаты моделирований;
- 4) для модифицированной модели возрастает частота экспериментов, в которых наблюдается рост населения по сравнению с начальным значением  $m^0$ . Доля экспериментов с подобным исходом также увеличивается с ростом значений  $P_{\max}$ ,  $P_{\min}$ ,  $m$ .

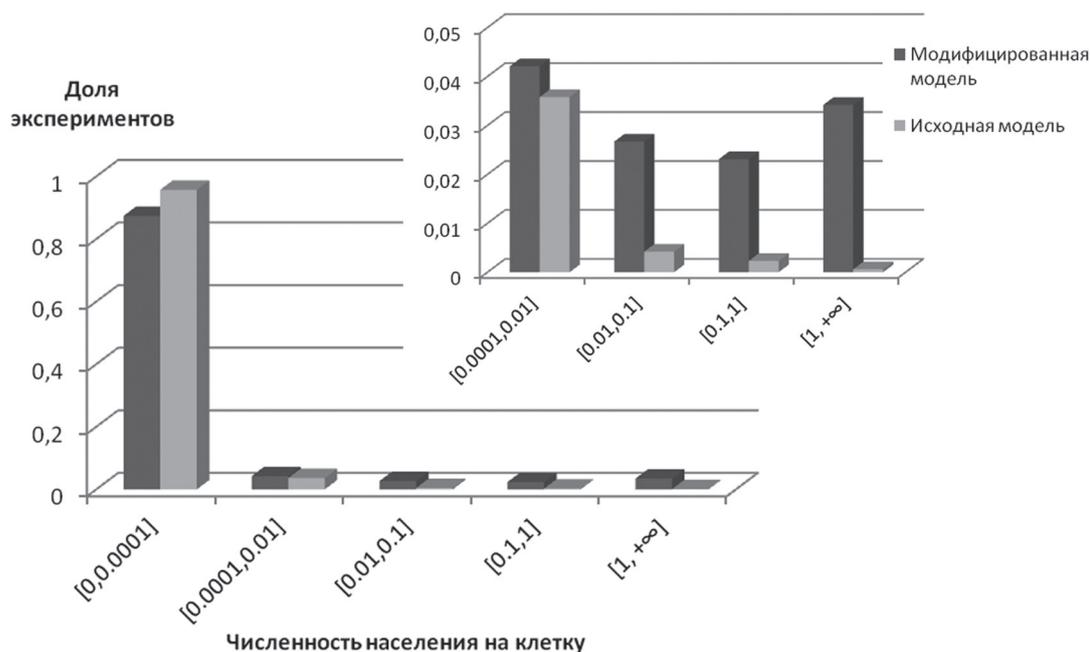


Рис. 3. Распределение доли экспериментов в зависимости от численности населения для  $p \in [0.4, 0.9]$

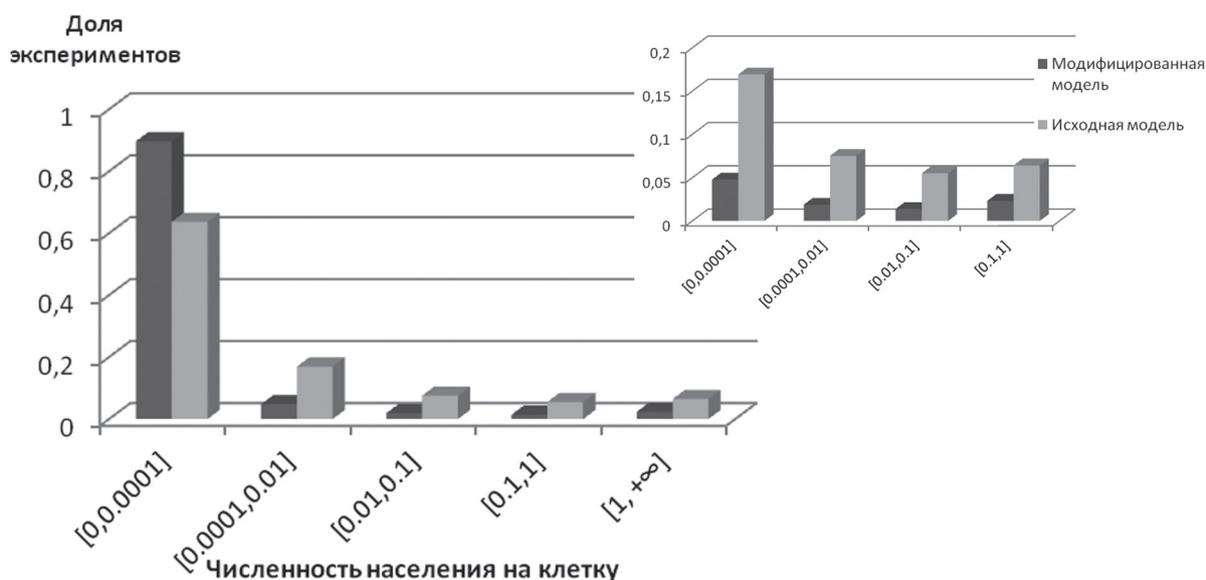


Рис. 4. Распределение доли экспериментов в зависимости от численности населения при  $p \in [0.3, 0.7]$

### 4.3. Результаты моделирования миграционных процессов на территории Чердынского района Пермского края

Разработанная модель была использована для моделирования миграционных процессов на территории Чердынского района Пермского края

в XIV–XV вв. Выбор территории связан с ее особым местом в истории освоения Урала, так как по этому району проходили важнейшие торговые речные пути. Богатый запас природных ресурсов способствовал укреплению экономических связей с другими территориями. Влияние Чердынского района как административного центра усилилось в XIV–XV вв., в это время достаточно интенсивно проис-

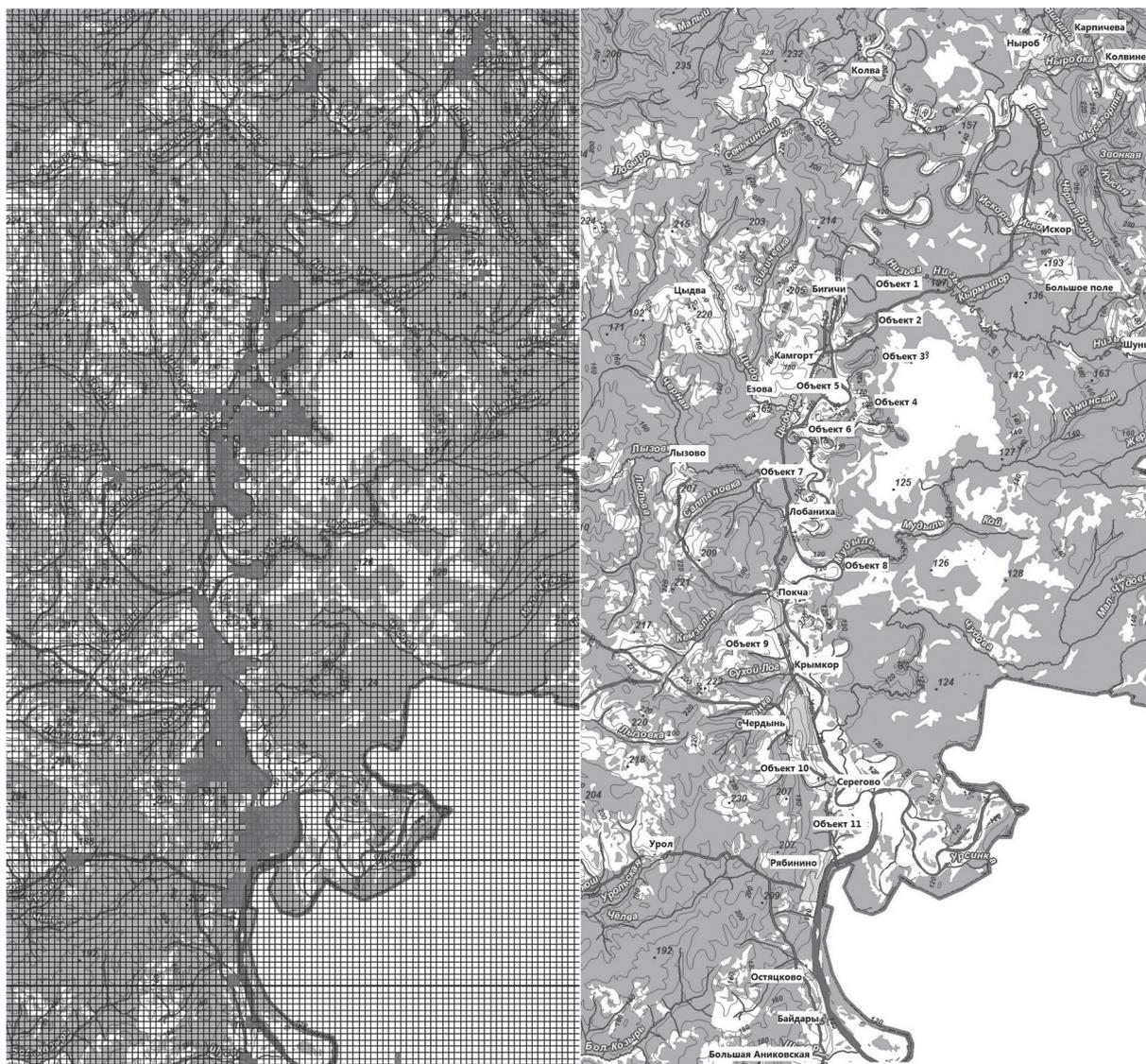


Рис. 5. Рассматриваемые объекты и их расположение на сетке клеточного автомата

ходило переселение в этот регион с северо-запада.

В исследуемой области были выделены наиболее крупные ныне существующие и «вымершие» населенные пункты: Нырб, Бигичи, Камгорт, Езова, Покча, Крымкор, Чердынь, Серегово, Рябинино, Остяцково, Большая Аниковская, Малая Аниковская, Урал и др. На основе указанных ранее критериев оценки территории были дополнительно выделены 11 незаселенных участков, обладающих хорошими характеристиками для проживания (рис. 5)<sup>17</sup>.

В качестве единицы миграционного потока был выбран квадратный участок площадью 50×50 метров, что примерно соответствует площади крестьянского двора и прилегающих территорий.

Поскольку исследование значимости ранее определенных военно-административных, геогра-

фических и экономических факторов, а также степени их влияния на формирование миграций выходит за рамки данной работы, для существующих административных единиц (сел, деревень, поселков), а также для территорий, обладающих наибольшим количеством выбранных признаков (близость к источникам пресной воды, относительно плоский рельеф, близость к судоходной реке, наличие крутых склонов на границе и т. п.), полагалась вероятность выживания  $P_{\max} = 0,9$ . Для прочих территории она составила  $P_{\min} = 0,1$ .

В результате проведения серии экспериментов длительностью 20, 50 и 100 итераций были получены статистические данные: средняя численность населения (в расчете на одну клетку автомата) и средняя вероятность «выживания» в каждой клетке. В случае, когда клетки входят в исследуемую административную единицу, указанные показате-

ли усредняются по всем клеткам, входящим в объект. Для получения указанных оценок территорий каждое моделирование было проведено 10000 раз.

Результаты моделирования были подвергнуты кластеризации по результатам моделирования при 20, 50, 100 итерациях по параметрам, а также по параметрам, характеризующим размер объекта и взаиморасположение входящих в него клеток: площадь, среднее число «благоприятных» клеток для внешней границы и среднее число «благоприятных» соседей внутри области. Под средним числом «благоприятных» соседей во внутренней области понимаем среднее количество соседей из окрестности Неймана первого порядка для клеток рассматриваемой области. Так, на рисунке 6 заливкой выделены клетка и ее окрестность Неймана. В случае, изображенном на рисунке 6 (1), клетка находится внутри исследуемой области размером 2×2, число «внутренних» соседей — клеток из окрестности Неймана, которые также находятся внутри области 2×2, равно двум. Количество «внешних» соседей для выделенной клетки из граничной области на рисунке 6 (2) равно единице.

Указанные величины использовались для кластеризации объектов методом дальних соседей с евклидовым расстоянием между объектами. Оптимальное число кластеров определялось в процессе кластеризации. Полученные результаты представлены в таблицах 1 и 2.

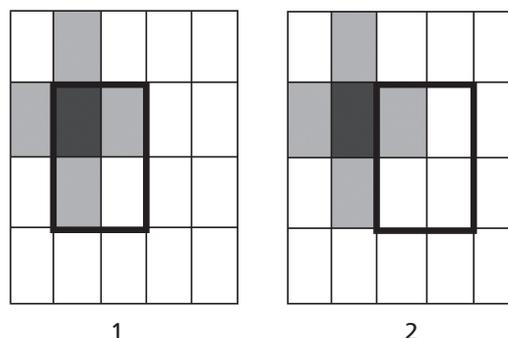


Рис. 6. Окрестность Неймана первого порядка (выделена серым): 1 — для клетки, находящейся внутри области 2×2; 2 — для клетки, находящейся на внешней границе области 2×2

Таблица 1

**Распределение административных единиц по кластерам (кластеризация по пространственным характеристикам объекта)**

Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3	Кластер 4
Ныроб	Карпичева	Колвинец	Чердынь
Колва	Большое поле	Остяцково	Объект 4
Езова	Шунья	Малая Аниковская	Объект 7
Покча	Лызово		Объект 9
Камгорт	Цыдва		Объект 10
Бигичи	Лобаниха		Объект 11
Рябинино	Крымкор		
Искор	Серегово		
Объект 1	Урол		
Объект 2	Байдары		
Объект 3	Большая Аниковская		
Объект 5	Объект 8		
Объект 6			

Таблица 2

**Распределение административных единиц по кластерам (кластеризация по пространственным характеристикам объекта и результатам моделирования)**

Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3	Кластер 4	Кластер 5
Ныроб	Карпичева	Колва	Искор	Крымкор
Езова	Колвинец	Бигичи		
Покча	Большое поле	Камгорт		
Чердынь	Шунья	Цыдва		
Серегово	Лобаниха	Объект 3		
Рябинино	Остяцково	Объект 8		
Объект 1	Байдары	Урол		
Объект 2	Большая Аниковская	Лызово		
Объект 4	Малая Аниковская			
Объект 5				

Окончание таблицы 2

Кластер 1	Кластер 2	Кластер 3	Кластер 4	Кластер 5
Объект 6				
Объект 7				
Объект 9				
Объект 10				
Объект 11				

Сопоставление полученных результатов с пространственным расположением объектов относительно друг друга, а также с расположением клеток внутри исследуемых объектов позволило выявить следующие закономерности:

- 1) чем плотнее друг к другу расположены клетки области, тем лучше показатели «выживаемости» объекта. Таким образом, чем ближе отношение длины объекта и его ширины к 1, тем выше показатели выживаемости по сравнению с другими объектами с той же площадью;
- 2) близость к другим благоприятным территориям повышает «выживаемость» рассматриваемого объекта;
- 3) объекты, обладающие малой площадью, склонны к более быстрому вымиранию (в сравнении с объектами с большей площадью).

Добавление результатов моделирования как дополнительных атрибутов объектов позволило получить новое разбиение исследуемых объектов на группы. В полученных группах проявляется синергетический эффект: объекты, расположенные рядом с благоприятными участками, демонстрируют более высокие показатели выживаемости, чем аналогичные объекты, не имеющие поблизости благоприятных территорий.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описан подход к моделированию миграционных процессов, основанный исключительно на использовании факторов формирования миграционных потоков и не тербующий, в отличие от большинства современных миграционных моделей, какой-либо статистической информации. В рамках данного исследования были выявлены недостатки выбранной модели S. C. Manrubia и D. H. Zanette и предложена ее модификация, позволяющая приблизить процесс развития модели к общим закономерностям формирования миграционных потоков. В модель введена возможность учитывать совокупность факторов, способствующих

формированию миграционных потоков и приживаемости мигрантов на новом месте, а также механизмы регулирования экстремально высокой численности населения на отдельно взятом участке и динамического управления интенсивностью миграционных потоков в зависимости от населенности территории.

Проведенные исследования свойств модифицированной модели, а также ее сравнительный анализ с исходной моделью подтвердили целесообразность внесенных изменений.

Для применения данной математической модели был разработан программный продукт, предоставляющий возможность интерактивной работы с картой исследуемой области, моделирования и просмотра полученных статистических показателей.

Исследуемая модель была применена для изучения миграционных процессов на территории Чердынского района Пермского края в XIV–XV вв. Основная цель исследования заключалась в выделении на указанной территории перспективных для археологических исследований участков. Особенностью построения математической модели в данной задаче является незначительное количество архивной информации о численности населения или ее полное отсутствие для некоторых населенных пунктов.

Накопленные в результате серий вычислительных экспериментов статистические данные и характеристики объектов (как элементов сетки) были подвергнуты кластерному анализу, посредством которого выделены группы участков, обладающих схожими закономерностями развития. Искусственно введенные территориальные единицы были отнесены в определенные группы наряду с реально существующими населенными пунктами. Наличие информации о существующих поселениях позволило сделать предположения о возможности проживания на неизвестных территориях населения в прошлом.

Построенная модель миграционных процессов может быть использована как дополнительный источник данных при подготовке и принятии решений о проведении археологических экспедиций.

## ПРИМЕЧАНИЯ

- <sup>1</sup> Manrubia S. C., Zanette D. H. Role of Intermittency in Urban Development: A Model of Large-Scale City Formation // *Physical Review Letters*. 1997. Vol. 79. No. 3. P. 523–526; Manrubia S. C., Zanette D. H. Transient dynamics and scaling phenomena in urban growth // *Fractals*. 1999. Vol. 7. No. 1. P. 1–8.
- <sup>2</sup> Ravenstein E. The Laws of Migration // *Journal of the Statistical Society*. 1885. №46. P. 167–235; Ravenstein E. The Laws of Migration: Second Paper // *Journal of the Royal Statistical Society*. 1889. №52. P. 241–305.
- <sup>3</sup> Ravenstein E. The Birthplace of the People and the Laws of Migration // *The Geographical Magazine*. 1876. №3. P. 173–177, 201–206, 229–233; Ravenstein E. The Laws of Migration // *Journal of the Statistical Society*. 1885. №46. P. 167–235; Ravenstein E. The Laws of Migration: Second Paper // *Journal of the Royal Statistical Society*. 1889. №52. P. 241–305.
- <sup>4</sup> Zipf G. *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. Cambridge, 1949. 573 p.
- <sup>5</sup> Stouffer S. Intervening Opportunities: A Theory Relating Mobility and Distance // *American Sociological Review*. 1940. №5. P. 845–867.
- <sup>6</sup> Lee E. A Theory of Migration // *Demography*. 1966. №3. P. 47–57.
- <sup>7</sup> Greenwood M. An Analysis of the Determinants of Geographic Labour Mobility in the United States // *Review of Economics and Statistics*. 51 (2). 1969. P. 189–194.
- <sup>8</sup> Harris J., Todaro M. Migration, unemployment and development: a two sector analysis // *American Economic Review*. 60 (1). 1970. P. 126–142.
- <sup>9</sup> Haurin D. R. The regional distribution of population, migration, and climate // *The Quarterly Journal of Economics*. 95 (2). 1980. P. 293–308.
- <sup>10</sup> Oliver F. R. Inter-Regional Migration and Unemployment, 1951–61 // *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*. 127 (1). 1964. P. 42–75; Lowry I. S. *Migration and metropolitan growth: two analytical models*. San Francisco: Chandler Publishing Company. 1966. 118 p.
- <sup>11</sup> Etzo I. The determinants of the recent interregional migration flows in Italy: a panel data analysis // *Journal of regional science*, 51 (5). 2011. P. 948–966; Chen A., Coulson N. E. Determinants of urban migration: Evidence from Chinese cities // *Urban Studies*, 39 (12). 2002. P. 2189–2197; Kinfu Y., Taylor J. Spatial mobility among Indigenous Australians: Patterns and determinants / *Working Papers in Demography 97, Demography & Sociology Program*. Canberra, Australian National University. 2005; Ortega F., Peri G. The Effect of Income and Immigration Policies on International Migration / *NBER Working Paper No 18322*, August 2012; Sarra A. L., Signore M. A Dynamic Origin-constrained Spatial Interaction Model Applied to Poland's Inter-provincial Migration // *Spatial Economic Analysis*, 5 (1). 2010. P. 29–41.
- <sup>12</sup> Zelinsky W. The hypothesis of the mobility transition. *Geographical Review*. 1971. 61. P. 219–49.
- <sup>13</sup> Manrubia S. C., Zanette D. H. Role of Intermittency in Urban Development: A Model of Large-Scale City Formation // *Physical Review Letters*. 1997. Vol. 79. No 3. P. 523–526; Manrubia S. C., Zanette D. H. Transient dynamics and scaling phenomena in urban growth // *Fractals*. 1999. Vol. 7. No 1. P. 1–8.
- <sup>14</sup> Зельдович Я. Б., Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Переमेжаемость в случайной среде // *Успехи физических наук*. Т. 152. Вып. 1. 1987. 32 с.
- <sup>15</sup> Васильева Т. П., Мызникова Б. И. Математическое моделирование градоформирования: подход на основе клеточных автоматов // *Актуальные проблемы механики, математики, информатики : материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием*. Пермь, 2010. С. 59; Васильева Т. П., Мызникова Б. И., Русаков С. В. О возможности моделирования процесса градообразования с помощью клеточных автоматов // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление*. 2011. №6–2 (138). С. 128–134.
- <sup>16</sup> Махалова Т. П., Русаков С. В. Применение технологии CUDA для моделирования миграционных процессов на основе клеточных автоматов // *Высокопроизводительные вычисления на графических процессорах : материалы II Всероссийской науч.-практ. конф. с междунар. участием с элементами науч. шк. для молодежи, 2–6 июня 2014 г. / отв. за вып. С. В. Русаков, М. М. Бузмакова*. Пермь, 2014. С. 39–43.
- <sup>17</sup> Махалова Т. П., Русаков С. В. Определение мест археологических раскопок путем моделирования миграционных процессов с помощью клеточных автоматов // *Информационный бюллетень Ассоциации «История и компьютер»*. №40: Компьютерные технологии и математические методы в исторических исследованиях : материалы III Междунар. науч. конф. (Петрозаводск, 1–7 июля 2013 г.). 2013, ноябрь. Петрозаводск, 2013. С. 125–129; Махалова Т. П., Русаков С. В. Исследование свойств клеточных автоматов в задаче моделирования миграционных процессов // *Актуальные проблемы математики и ее прикладные аспекты — 2013 : тез. науч.-практ. конф. (Пермь, 29–30 октября 2013 г.) / гл. ред. В. И. Яковлев*. Пермь, 2013. С. 72.